ISTORIJA IDEJA I TEORIJA U DIGITALNOJ OBRADI SIGNALA

Nevena Radović [1]

1. UVOD

Digitalna obrada signala (DOS) je jedna od najrazvijenijih naučnih grana današnjice koju karakteriše interdisciplinarnost, brojne aplikacije i uticaj na mnoštvo srodnih oblasti. Zahvaljujući njoj revolucionarne promjene su već učinjene u okviru komunikacija, procesiranja biomedicinskih slika, radara i sonara, viskokvalitetne reprodukcije muzike, istaživanja nafte. Svaka od navedenih primjena je razvila specifičnu DOS tehnologiju sa sopstvenim algoritmima, matematičkim aparatom i specijalizovanim tehnikama.

Ono što izdvaja DOS od ostalih oblasti kompjuterskih nauka je jedinstven tip podataka koji koristi–signali. U većini slučajeva signali vode porijeklo iz stvarnog svijeta: seizmičke vibracije, slike, zvučni talasi i slično. Da bi se vršila bilo kakva obrada takvih signala, neophodno ih je prevesti u računaru razumljiv oblik, odnosno u oblik nad kojim bi bilo moguće vršiti različite numeričke transformacije. Vremenski kontinualan signal iz tog razloga podliježe procesima odabiranja i digitalizacije, te se nakon željenog procesiranja generiše obrađena verzija kontinualnog signala pomoću neke interpolacione šeme, sl.1.

Da bismo uspješno ispratili nastanak i razvoj DOS-a neophodno je proučiti fundamentalne procese na kojim se bazira, što će biti učinjeno u nastavku. Cilj rada je da sagleda sve relevantne događaje i otkrića koja su doprinijela definisanju DOS-a kao zasebne naučne discipline, u obliku u kojem je danas prisutna.

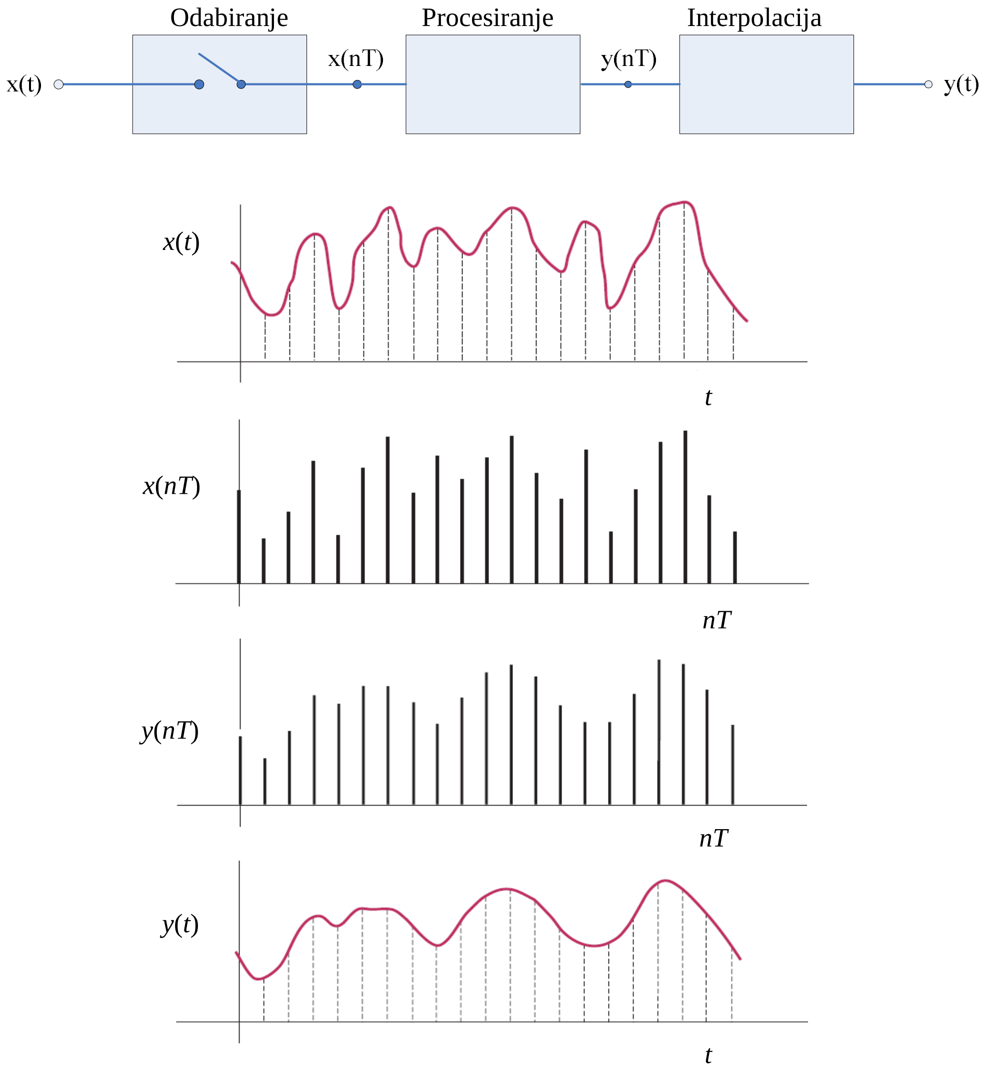
2. PERIOD GRČKOG KLASICIZMA

Otkriće koje nesumnjivo predstavlja osnov nastanka DOS-a, a za koje je zaslužan Arhimed, je metod za računanje obima (περιμετρος na grčkom) kruga jediničnog prečnika.

Arhimed iz Sirakuze (ca. 287-212. prije nove ere) je poznat po otkriću i definiciji hidrostatičkog zakona o tijelima potopljenim u tečnost. Ipak, njegova istraživanja su otišla mnogo dalje od pomenutog. Suštinski je doprinio teoriji mehanike i matematike, i napisao nekoliko knjiga na ovu temu, [2].

---

[1] Mr Nevena Radović, Elektrotehnički fakultet, Podgorica.



Slika 1. Odabiranje, procesiranje i interpolacija vremenski kontinualnog signala

Obim kruga jediničnog prečnika prema pomenutom metodu iznosi π. Do ovoga rezultata Arhimed je došao tako što je u krug upisao šestougao, a zatim ga podijelio na šest jednakostraničnih trouglova, sl.2. Očigledno, stranice svakog trougla su jednake polovini prečnika, odnosno polovini jedinične dužine. Imajući u vidu da je najkraća trajektorija između dvije tačke prava linija zaključio je da je obim kruga, π, veći od 3, što je obim šestougla, p_6, odnosno $p_6=3 < \pi$. Crtanjem tangenti u tačkama A, B, C, ... opisao je šestougao oko kružnice, sl.3. Ispostavlja se da je obim opisanog šestougla

$P_6 = 6\times 1/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3} = 3.4641$, a obzirom da je on veći od obima kruga, očigledno je $\pi < P_6$=3.4641. Na ovaj način je Arhimed odredio gornju i donju granicu obima kruga,

$$p_6=3 < \pi < 3.4641= P_6. \tag{1}$$

Uočio je da je za definisanje preciznijih granica vrijednosti π potrebno povećati broj stranica i potom primjeniti istu proceduru kao za slučaj šestougla, pa je izveo opšte formule za $2n$-strani poligon,

$$P_{2n} = \frac{1}{1/2(1/p_n + 1/P_n)} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} \quad \text{i} \quad p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}\,.$$

Koristeći prethodne relacije dolazimo do numeričkih vrijednosti gornje i donje granice za π. Ove granice su, zapravo, diskretne funkcije promjenljive n, a njihove srednje vrijednosti sukcesivne aproksimacije za obim kruga. Opisanim postupkom Arhimed je izvršio diskretizaciju obima kruga i interpolirao rezultate u cilju njegove estimacije.

Srednja vrijednost za π u petoj iteraciji iznosi 3.1419, što povlači grešku od 0.008%. Ustaljena racionalna aproksimacija za π, 22/7=3.1429, se često naziva Arhimedovim π.

Prilikom računanja obima kruga, Arhimed se zaustavio kod 96-ostranog poligona, u petoj iteraciji algoritma. Nastavljajući algoritam do 16-te iteracije (393 216-ostrani poligon) postiže se preciznost reda veličine 10^{-10}. Da je bar jednom pomenuo da bi se obimi opisanog i upisanog poligona, ili pak njihove srednje vrijednosti, poklapali sa obimom kruga kada n teži beskonačnosti, uveo bi koncept beskonačnosti i graničnih vrijednosti (limesa), ali su ovi principi morali sačekati 2000 godina prije nego što su postali dio moderne evropske matematike tokom 1600-tih.

3. RENESANSA MATEMATIKE

Ponovno interesovanje za matematiku i za Arhimedov rad se javio u Evropi početkom 17. vijeka. Britanci Džon Valis (1616-1703) i Džejms Gregori (1638-1675) su razvili tehnike za izračunavanje površina različitih geometrijskih figura proširivanjem Arhimedovih principa.

Valis je posmatrao površinu ispod parabole, $y=x^2$, koju je podijelio na niz pravougaonika, svaki širine ε, kao na sl.4(a). Primjetio je da kako se broj pravougaonika povećava, a njihova širina smanjuje, suma površina pravougaonika biva sve bliža stvarnoj vrijednosti površine ispod parabole. Odabirajući potom beskonačno malu širinu pravougaonika i njihov beskonačno veliki broj, definisao je koncept granične vrijednosti funkcije i postavio temelje integracionog računa.

Na ovaj način Valis je izvršio diskretizaciju parabole opisivanjem diskretnih konstantnih odbiraka, na isti način na koji je Arhimed diskretizovao krug, opisujući oko njega n-strani poligon.

Iz perspektive DOS-a, Valis je diskretizacijom parabole uveo princip odabiranja signala. Naime, ako je funkcija na sl.4(b) signal, onda bi pravougaonici na sl.4(a) ili (b) bili pulsevi koji bi postali impulsi za slučaj da $\varepsilon\rightarrow 0$. Drugim riječima, Valisova reprezentacija je analogna odabiranju signala impulsnom modulacijom, [3].

Valis je proračunao površine

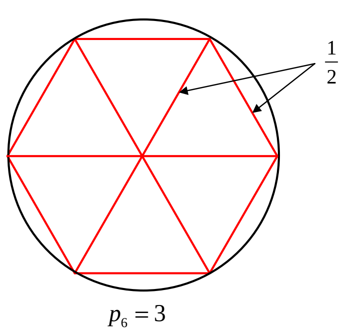
$$\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \tag{2}$$

za određene vrijednosti promjenljive n i pokazao da je, [2],

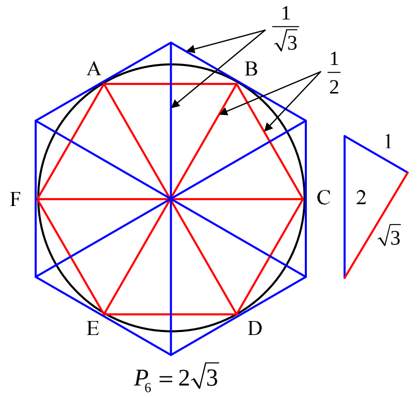
$$\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{2} = \lim_{N\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (N-1)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot N} = \lim_{N\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot \ldots \cdot N}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (N-1)^2},$$

što je poznato kao Valisova formula za π.

Gregori je proširio Arhimedov algoritam za evaluaciju površine kruga razmatrajući površinu elipse. Konstatujući da će u slučaju beskonačno velikog n površina upisanog trougla, odnosno opisanog paralelograma težiti površini elipse, uveo je pojam konvergencije.



Slika 2. Šestougao upisan u krug jediničnog prečnika



Slika 3. Šestougao opisan oko kruga jediničnog prečnika

Rad Valisa je nastavio Isak Njutn (1642-1727), koji je izmjenio gornju granicu integrala u jednačini (2) sa x, i prateći Valisovu metodologiju došao je do binomijalne teoreme u njenom standardnom obliku,

$$(1+x^2)^k = 1 + \binom{k}{1} x + \binom{k}{2} x^2 + \ldots + \binom{k}{n} x^n + \ldots \tag{3}$$

Potrebno je istaći da je razvoj u jednačini (3) za pozitivne brojeve poznat mnogo prije Njutnovog vremena u formi tzv. Paskalovog (1623-1662) trougla.

Binomijalna teorema je istraživana i nakon Njutna. Gaus (1777-1855) je generalizovao njenu aplikabilnost na slučajne racionalne vrijednosti promjenljive n. S druge strane, rad Ojlera (1707-1783), Košija (1789-1857) i Lorena (1813-1854) sa kompleksnim brojevima, kompleksnim promjenljivima i funkcijama kompleksnih promjenljivih je pokazao da je binomijalna teorema takođe primjenljiva za slučaj kada je x kompleksna promjenljiva.

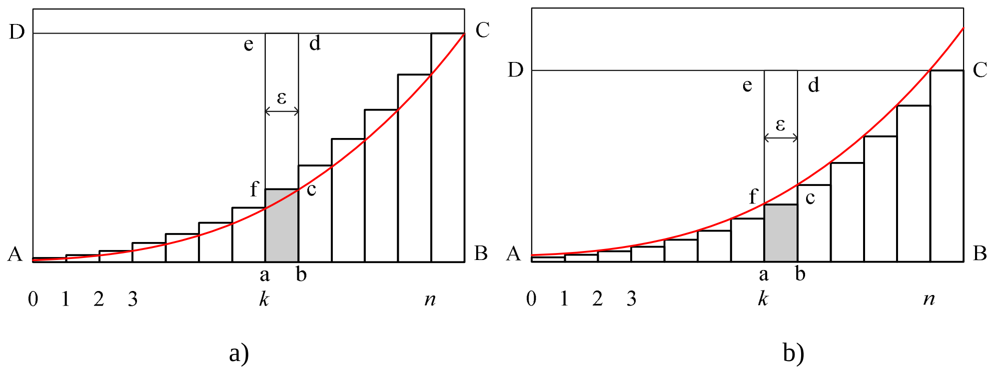
Ukoliko izvršimo smjenu $x=z^{-1}$ u jednačini (3), pri čemu je z kompleksna varijabla, tada dobijamo

$$(1+z^{-1})^k = 1 + \binom{k}{1} z^{-1} + \binom{k}{2} z^{-2} + \ldots + \binom{k}{n} z^{-n} + \ldots$$

što u DOS-a predstavlja z-transformaciju signala

$$x(nT) = u(nT)\binom{k}{n},$$

pri čemu je $u(nT)$ jedinična step funkcija diskretna u vremenu. Inverznu z-transformaciju dobijamo deduktivno, pronalaženjem koeficijenta z^{-n} u razvoju binomijalnog reda.



Slika 4. Valisove geometrijske konstrukcije

Posmatrajmo z-transformaciju u opštem obliku,

$$X(z) = \frac{Kz^m}{(z-w)^k},$$

gdje su m i k cijeli brojevi, a K i w realne ili kompleksne konstante. Očigledno je da se dodijeljivanjem konkretnih vrijednosti za parametre k, K i m, može formirati kompletna tabela z-transformacija koristeći isključivo Njutnovu binomijalnu teoremu.

3.1. DŽEJMS STIRLING

Jedan od najpoznatijih škotskih matematičara 18. vijeka, Džejms Stirling, je svojim radom *Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et inter polatione serierum infinitarum* otpočeo novo poglavlje DOS-a. Riječ je o digitalnim filtrima koji mogu da izvode interpolaciju, diferenciranje i integraljenje, odnosno o mogućnosti njihovog dizajna upotrebom interpolacione formule predložene u tom radu.

Naime, ako su vrijednosti $x(nT)$ poznate za n=0, 1, 2, ..., tada se vrijednost $x(nT+pT)$ za p iz opsega $0 < p < 1$ određuje upotrebom Stirlingove interpolacione formule:

$$\begin{aligned} x(nT+pT) &= [1+\frac{p^2}{2!}\delta^2+\frac{p^2(p^2-1)}{4!}\delta^4+\ldots]x(nT)+\frac{p}{2}[\delta x(nT-\frac{1}{2}T)+\delta x(nT+\frac{1}{2}T)] \\ &+\frac{p(p^2-1)}{2(3!)}[\delta^3 x(nT-\frac{1}{2}T)+\delta^3 x(nT+\frac{1}{2}T)] \\ &+\frac{p(p^2-1)(p^2-2^2)}{2(5!)}[\delta^5 x(nT-\frac{1}{2}T)+\delta^5 x(nT+\frac{1}{2}T)]+\ldots \end{aligned} \quad (4)$$

pri čemu

$$\delta x(nT+\frac{1}{2}T)=x(nT+T)-x(nT) \tag{5}$$

označava centralnu udaljenost od $x(nT+\frac{1}{2}T)$.

Diferenciranjem ili integraljenjem jednačine (4) mogu biti izvedene formule za numeričko diferenciranje ili integraljenje.

Zanemarujući šesti i članove višeg reda, uz pretpostavku da je p=1/2 u jednačini (4), a potom eliminisanjem centralnih razlika koristeći jednačinu (5), dobijamo

$$y(nT)=x(nT+\frac{1}{2}T)=\sum_{i=-3}^{3}h(iT)x(nT-iT)\,.$$

Proračunom koeficijenata $h(iT)$ determinišemo diferencijalnu jednačinu nerekurzivnog (FIR) vremenski diskretnog sistema.

Interpolacija je proces koji odgovara crtanju glatke krive kroz tačke odabiranja, što bi bilo analogno niskopropusnom filtriranju. Stirling je posmatrao proizvoljni interpolacioni sistem predstavljen funkcijom prenosa

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{k=-3}^{3}h(iT)z^{-k}\,.$$

Frekvencijski, amlitudski i fazni odziv je definisao kao

$$H(e^{j\omega T})=\sum_{i=-3}^{3}h(iT)e^{-jk\omega T}\,,\ M(\omega)=\left|\sum_{i=-3}^{3}h(iT)e^{-jk\omega T}\right|,\ \text{i}\ \theta(\omega)=\arg\sum_{i=-3}^{3}h(iT)e^{-jk\omega T}\,,$$

respektivno. Korištenjem numeričkih vrijednosti za $h(iT)$ izveo je amplitudski odziv interpolacionog sistema, za koji se ispostavlja da je veoma blizak odzivu niskopropusnog filtra.

Upotreba Stirlingove formule za kreiranje nerekurzivnih filtara, što je slučaj i sa Furijeovim metodom redova, rezultuje nekauzalnim filtrima, [3]. Kašnjenjem impulsnog odziva periodom $(N–1)T/2$, gdje je N širina filtra, može se ostvariti kauzalni filtar. Primjena ove korekcije rezultuje linearnim faznim odzivom i karakteristikom kašnjenja koja je približno ravna u odnosu na propusni opseg interpolacije. Interesantno je istaći da je ovaj interpolator dizajniran korišćenjem koncepata predloženih prije 250 godina.

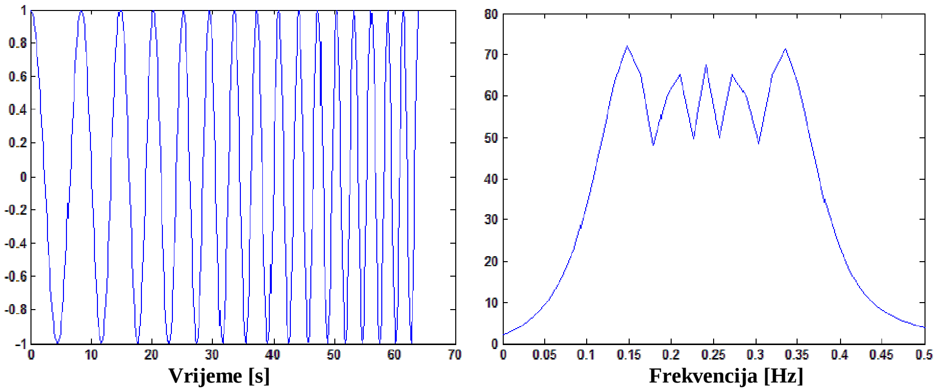
3.2. ŽAN BAPTIST DŽOZEF FURIJE

Jedno od najbitnijih doprinosa matematici analize signala se pripisuje Žan Baptist Džozef Furijeu (1768-1830) koji je predložio, sada opšte poznate, Furijeove redove kao dio rada o prenosu toplote.

Iako je bio veoma zainteresovan za matematiku, Furije upisuje studije teologije, opredjeljujući se za poziv sveštenika. Svoje religiozne ambicije ipak napušta nakon što mu se ukazala prilika da studira u *Ecole Normale* (kasnije *Ecole Polytechnique*) u Parizu, gdje su ga podučavali Lagranže (1736-1813) i Laplas (1749-1827).

U vrijeme Francuske revolucije postaje politički aktivan zbog čega je u par navrata i hapšen. Odabran je da 1798. prati Napoleonovu vojsku u invaziji na Egipat kao naučni savjetnik. U Francusku se vratio 1801. kako bi preuzeo *Ecole Polytechnique*.

U periodu od 1804. do 1807. našao je vremena da nastavi istraživanja o transferu toplote. Rezultate je prezentovao u radu „Propagacija toplote u čvrstim tijelima“ 1807. na Francuskom državnom institutu. Rad je izazvao kontraverze od samog starta. Komisija, u kojoj su bili i Furijeovi bivši učitelji Lagranže i Laplas, je sastavila izvještaj koji je odbacivao rad zbog analitičke kompleksnosti u izvođenju jednačina za transfer toplote jer su podrazumijevale upotrebu trigonometrijskih redova, sada univerzalno poznatih kao Furijeovi redovi, [5], uz obrazloženje da su „divergentni redovi izum samog đavola, te da je sramno zasnivati na njima bilo kakve naučne hipoteze“. Kontraverza između matematičara se nastavila još par godina, dok Dirihle, Furijeov učenik, nije objavio teoremu o konvergenciji Furijeovih redova 1829. godine koju su ubrzo zatim upotpunili Fridrih i Riman.



Slika 5. Reprezentacija linearnog FM signala u vremenskom (lijevo) i frekvencijskom domenu (desno).

Furijeovi redovi zajedno sa Furijeovom transformacijom,

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \ ,$$

obezbjeđuju kompletnu deskripciju periodičnih i neperiodičnih signala u frekvencijskom domenu, sl.5. S druge strane, analitički nastavak Furijeove transformacije u kompleksni s-domen ($j\omega$ se smjenjuje sa kompleksnom promjenljivom s) daje Laplasovu transformaciju

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \ .$$

Laplasova transformacija impulsnog odziva vremenski kontinualnog sistema rezultuje funkcijom prenosa sistema, te je konverzijom funkcije prenosa iz kontinualnog u vremenski diskretni oblik moguće iz analognih izvesti veliki broj digitalnih filtara, [3].

3.3. SIMEON DENIS POASON

Još jedan Lagranžeov i Laplasov učenik koji je značajno doprinio matematici i nauci uopšte je Simeon Denis Poason (1781-1840). Njegovo ime se vezuje za teoremu integraljenja, distribuciju vjerovatnoće, formulu sumiranja, zakon o elastičnosti tijela, kao i za konstantu električnog polja.

Studije matematike je otpočeo 1798. na *Ecole Polytechnique*. Ubrzo, 1800. godine postaje predavač, 1802. je unaprijeđen u vanrednog, a 1806. u redovnog profesora.

Jedan od Poasonovih doprinosa koji je od fundamentalnog značaja za DOS je formula sumiranja, koja predstavlja opšti matematički rezultat pridružen Furijeovim redovima. U kontekstu analize signala može biti zapisana u obliku:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jn\omega_s) e^{-j\omega_s t} \ ,$$

pri čemu je $x(t)$ signal, $X(j\omega)$ njegova Furijeova transformacija ili frekvencijski spektar, T period u sekundama i $\omega_s=2\pi/T$ je frekvencija u rad/s. Koristeći Poasonovu formulu sumiranja moguće je pokazati da je spektar odabranog signala $\hat{x}(t)$ dat sa

$$X(j\omega) = X_D(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega + jn\omega_s) \ , \tag{6}$$

gdje je $X_D(e^{j\omega T})$ z-transformacija $x(nT)$ izračunata pomoću jediničnog kruga $z = e^{j\omega T}$ u z-ravni, T je period odabiranja, a ω_s frekvencija odabiranja, [3]. Dakle, ukoliko je poznat frekvencijski spektar $X(j\omega)$ kontinualnog signala $x(t)$ spektar odgovarajućeg vremenski diskretnog signala $x(nT)$ može lako biti izveden.

3.4. PJER ALFONS LOREN

Kao što je to bio slučaj sa Furijeom i Poasonom, i Pjer Alfons Loren (1813-1854) je učio na *Ecole Polytechnique*. Započeo je studije 1830. i završio ih 1832. kao jedan od najboljih studenata u svojoj klasi. Poslije diplomiranja, pridružio se vojnim trupama svoje zemlje, nakon čega je ubrzo poslat u Alžir, kada su se zahuktavali konflikti između ove zemlje i Francuske. Loren se vratio u Francusku oko 1840. kada su i nastali njegovi prvi radovi iz oblasti matematike.

Jedan od najvažnijih Lorenovih matematičkih doprinosa su Lorenovi redovi, koji su publikovani tek nakon njegove prerane smrti u 41-oj godini.

Lorenovi redovi se danas tretiraju kao dio teoreme kompleksne analize, Lorenove teoreme, i specificiraju uslove pod kojima analitička funkcija kompleksne promjenljive, $F(z)$, može biti razvijena u Lorenove redove oblika

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^{-n} \ , \tag{7}$$

gdje je a proizvoljna kompleksna konstanta. Prema teoremi, $F(z)$ ima onoliko Lorenovih redova koliko postoji tačaka konvergencije u z-ravni, ali je svaki od njih jedinstven u svojoj oblasti konvergencije. Koeficijenti a_n za svaki red su dati integralom po zatvorenoj površi

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)(z-a)^{n-1} dz \ , \tag{8}$$

gdje je Γ zatvorena kontura u svojoj oblasti konvergencije i okružuje tačku $z=a$. Redovi su generalizacija Tejlorovih redova i obuhvataju Maklorenove i binomijalne redove kao specijalne slučajeve.

Ako uporedimo z-transformaciju signala $x(nT)$,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

sa Lorenovim redovima u jednačini (7), njihova važnost za DOS postaje očigledna. Primjećujemo da je z-transformacija Lorenov red sa $a_n = x(nT)$ i a=0. Na osnovu teoreme zaključujemo da je ovo jedinstven Lorenov red $X(z)$ u koordinatnom početku z-ravni koji konvergira u oblasti $R < |z| < \infty$, pri čemu je R prečnik kruga koji obuhvata sve singularitete za $X(z)$, [3]. Stoga, signal $x(nT)$ može biti jednoznačno izveden iz svoje z-transformacije korištenjem jednačine (8).

3.5. HERI NIKVIST

Naredno poglavlje spektralne reprezentacije signala se počelo pisati prvih godina dvadesetog vijeka, a veoma značajan doprinos je ostvario Heri Nikvist (1889-1976). Rođen je u Nilsu, Švedska, a u SAD je emigrirao 1907. godine. Nakon BSc i MSc diplome koje je dobio na Univerzitetu Sjeverne Dakote, 1914. i 1915. respektivno, prelazi na Jejl, na kojem je doktorirao 1917. Čitav radni vijek, do penzije 1954., je proveo u *Bell Telephone Laboratories*.

Značajni su njegovi doprinosti u oblasti električnih kola i sistema, a posebno se ističe Nikvistova kriva, koja je definisana kao dio Nikvistovog kriterijuma stabilnosti sistema. Osim pomenutog, objavio je veoma značajan rad u oblasti termalnog šuma, koji se iz tog razloga često naziva Džonson-Nikvistovim šumom.

Veza Nikvista sa DOS-om se odnosi na teoremu odabiranja. Njegov doprinos je u dokazu da periodični pulsni signal, sastavljen od sekvence od N ravnomjerno raspoređenih pravougaonih pulseva proizvoljnih amplituda, kao što je primjer na sl.5, može biti jednoznačno deteriminisan pomoću amplituda i faznih uglova prvih N/2 sinusoidalnih komponenti Furijeovih redova periodičnog signala rješavanjem sistema od N jednačina. Osnovno pravilo za takav signal, u Hz, je dato sa

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{N_\tau}, \tag{9}$$

pri čemu je T period pulsnog signala i τ je trajanje svakog pravougaonog pulsa. Ako je B opseg od 0 do harmonika N/2, tada iz jednačine (9) dobijamo

$$B = \frac{N}{2} f_0 = \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{N_\tau} = \frac{1}{2\tau},$$

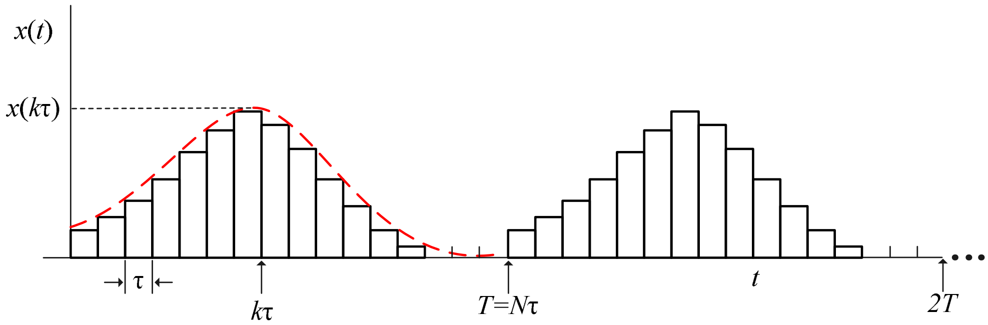
i ako imamo u vidu da je $1/\tau = f_s$, slijedi

$$B = \frac{f_s}{2} \text{ u Hz ili } \frac{\omega_s}{2} \text{ u rad/s},$$

pri čemu je $\omega_s = 2\pi f_s$. Drugim riječima, pulsni signal je jednoznačno determinisan spektrom signala u frekvencijskom opsegu od 0 do $f_s/2$, pri čemu je vrijednost $f_s/2$ poznata kao Nikvistova frekvencija.

Gore navedeni zaključak je izveden u kontekstu telegrafije, pri čemu je Nikvistov cilj bio da prenese informacije telegrafskom linijom. Ako je τ veoma mala vrijednost, npr. ε, pulsni signal bi u praksi predstavljao vremenski kontinualan signal $x(t)$, na sl.6 označen isprekidanom linijom. Pod ovim uslovima, pulsni signal se može smatrati odabranim, a f_s i

$f_s/2$ frekvencijom odabiranja i Nikvistovom frekvencijom respektivno. Ipak, izvođenje signala rješavanjem sistema od N jednačina ne bi imao praktični značaj, jer bi broj pulseva N, a samim tim i broj jednačina, bio izuzetno veliki za malu vrijednost τ.



Slika 6. Nikvistov periodični pulsni signal

S obzirom da je Nikvist izveo svoj rezultat koristeći Furijeove redove dokazao je da su granični uslovi opsega primjenljivi na periodične signale. U naporu da proširi validnost uslova na neperiodične signale predložio je da T bude veoma veliko, dan ili godina, po mogućnosti dodavanjem pulseva nulte amplitude, sl.6. Nažalost, ako bismo učinili T beskonačno velikim, analiza ne bi bila validna, jer bi svi Furijeovi koeficijenti postali nule.

3.6. KLOD ELVUD ŠENON

Opštiji dokaz da signal koji zadovoljava Nikvistov kriterijum može biti rekonstruisan od niza uniformno raspoređenih vrijednosti signala je dat od strane Šenona 1949. godine, [4]. Pokazao je da ako signal ograničenog opsega $x(t)$ koji zadovoljava kriterijum prolazi kroz idealan kanal sa frekvencijskim odzivom,

$$H(j\omega)=\begin{cases}1 & \text{za } -\omega_s/2<\omega<\omega_s/2\\ 0 & \text{ostalo}\end{cases},$$

na izlazu dobijamo signal oblika,

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin[\omega_s(t-nT)/2]}{\omega_s(t-nT)/2}\,. \tag{10}$$

S obzirom da kanal ne unosi smetnje u spektar signala, zaključio je da primljeni signal mora biti alternativna reprezentacija originalnog signala. Jednačina (10) je, u suštini, interpolaciona formula koja rekonstruiše originalni signal od njegovih vrijednosti $x(nT)$, za n=... , -2, -1, 0, 1, 2, ... Šenon je u dokazu koristio Furijeovu transformaciju, i pokazao da se Nikvistov kriterijum odnosi i na periodične i na neperiodične signale koji imaju Furijeovu transformaciju.

Nedavno je otkriveno da je teorema odabiranja definisana nezavisno od strane par naučnika, npr. Koteljnikova 1933., Raba 1939., i Someja 1949.

Klod Elvud Šenon (1916–2001) je studirao na Mičigen Univerzitetu i 1936. dobio dvije BSc diplome, jednu iz elektrotehnike, a drugu iz matematike. Studije je nastavio na

Massachusetts Institute of Technology (MIT), dobivši potom MSc diplomu iz oblasti elektrotehnike i PhD iz matematike 1940. Pridružio se odsjeku za matematiku u *Bell Laboratories* 1941. u kojem se zadržao do 1972. MIT mu je 1956. ponudio mjesto gostujućeg profesora, a 1958. dobija titulu *Donner Professor of Science*, što mu omogućava da se potpuno posveti istraživanju. Dvadeset godina kasnije, 1978. dobija titulu *Emeritus*.

Potrebno je istaći da je dokaz teoreme odabiranja bio samo jedan od manjih Šenonovih doprinosa, u poređenju sa impozantnim ostvarenjima u ostalim oblastima elektrotehnike. U magistarskom radu je predložio aplikaciju Bulove algebre za opis komutacionih kola, što je potom postalo standardna metodologija prilikom dizajna digitalnih kola i računara. Od 1940. je počeo da radi u oblasti komunikacione teorije. Tokom godina je postavio osnove onoga što danas nazivamo informacionom teorijom.

3.7. ČARLS BEBIDŽ

Čarls Bebidž (1791–1871) se školovao na Univerzitetu Kembridž, gdje je 1814. završio BSc studije. Tokom perioda od 1815. do 1819. napisao je brojne radove iz različitih oblasti matematike. 1819. se našao pred životnim izazovom. Naime, trebao je da dizajnira i konstruiše diferencijalnu mašinu koja bi omogućila računanje i štampanje numeričkih tablica. Prototip je konstruisao 1822. i na osnovu njega obezbijedio finansiranje od strane Britanske vlade. Mašina je obuhvatala 25000 visokopreciznih mehaničnih djelova. Početni finansijski grant je ubrzo potrošen i Bebidž se opet obratio Britanskoj vladi za pomoć koja je, u odsustvu vidljivog napretka, izostala. Ubijeđen u krajnji uspjeh svojih nastojanja, Bebidž je korišćenjem vlastitih sredstava završio detaljne nacrte jednostavnije i ekonomičnije diferencijalne mašine, no do krajnje realizacije ipak nije došlo.

Slijedeći Bebidžov projekat je bila analitička mašina, koja bi bila u stanju da izvodi sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje, zadatim redom. Mašina bi obuhvatala radno tijelo i skladište, antipode današnje centralne procesorske jedinice i memorije kod modernih računarskih sistema, a njeno programiranje bi se odvijalo pomoću probušenih kartica. Na ovom projektu je radio s vremena na vrijeme, do kraja svog života, ali nikada nije pokušao praktičnu realizaciju.

Bebidž je, zapravo, pokušavao da konstruiše diskretni sistem koji bi koristio numeričke metode, odnosno bio u mogućnosti da radi sa numeričkim podacima.

4. MODERNA ERA

Period neposredno prije i tokom Drugog svjetskog rata je predstavljao svojevrsan izazov za nauku. Vodeća uloga je pripala instituciji *Bell Laboratories* u kojoj su radili najpoznatiji naučnici toga vremena.

Jedno od većih ostvarenja je rad H. S. Bleka, J.O. Edsona i W. M. Gudala kojim su 1940. uvedeni koncepti analogno-digitalne i digitalno-analogne konverzije podataka. Njihova osnovna primjena je bila u analizi govora, pa su poslužili za konstrukciju uređaja za praćenje i obradu te vrste signala. Ipak, naučna javnost je morala da sačeka desetak godina na prezentaciju ostvarenih rezultata iz bezbjedonosnih razloga, jer su pomenuti uređaji korišćeni u vojne svrhe.

Osim otkrića na polju komunikacija, vladao je poseban interes za konstrukcijom mašina koje bi precizno i efikasno vršile razne tipove proračuna, i nekoliko njih je zaista napravljeno tokom toga perioda, bazirajući se na novoj, aktuelnoj elektronskoj tehnologiji. Najzapaženija od ovih mašina je *Electronic Numerical Integrator and Computer* (ENIAC), konstruisan na Pensilvanija Univerzitetu.

Numerički metodi su našli svoju punu primjenu u modernim digitalnim računarima pedesetih i šezdesetih godina, nakon čega je ostvaren značajan napredak u razvoju algoritama koji se mogu koristiti za procesiranje signala predstavljenih u uslovima numeričkih podataka. Do kasnih pedesetih kohezivna kolekcija tehnika nazvanih „poravnavanje podataka i predikcija“, su počele da se razvijaju kroz napore pionira kao što su Blekman, Bode, Šenon, i ostali. Tokom ranih šezdesetih entit nazvan „digitalnim filtrom“ je počeo da se pojavljuje u literaturi, kako bi opisao kolekciju algoritama koji mogu biti korišćeni za spektralnu analizu i procesiranje podataka, [5]-[7]. Blekman je 1965. opisao ovu novu tehnologiju u svojoj knjizi o poravnavanju podataka i predikciji, [8], i uključio je u rad određene tehnike koje je nazvao „numeričkim filtriranjem“.

Iste godine je Kajzer, u okviru jedne od svojih knjiga, objavio poglavlje „Digitalni filtri“, [9], koje je poslužilo kao osnov za dalji razvoj u pomentom pravcu. Tada je definisao digitalni filtar kao sistem koji izvršavanjem određenog algoritma odabrani signal, odnosno sekvencu brojeva koja ima ulogu ulaza, transformiše u drugu sekvencu brojeva, koja se naziva izlaznim signalom. Prezentovao je kolekciju tehnika obrade signala koje je moguće primjeniti za simulaciju dinamičnih sistema i analognih filtara. Hardverska forma digitalnih filtara se počela pojavljivati krajem šezdesetih, a prvi dizajni su objavljeni 1968. od strane Džeksona, Kajzera i Mekdonalda.

Tokom ovog veoma produktivnog perioda formalizovana je diskretna Furijeova transformacija, nakon čega su predloženi efikasni algoritmi za njen proračun, poznatiji kao *Fast Fourier Transform* (FFT), [10], [11]. Naime, bitan nedostatak ove transformacije je veliko vrijeme proračuna, što je značajno ograničavalo njenu praktičnu upotrebu. Danijelson i Lankzon su 1942. prepoznali izvjesne simetrije i periodičnosti koje bi smanjile broj operacija. Međutim, čak i sa napretkom digitalnih računara tehnike za redukciju vremena proračuna su ostale generalno nepoznate do 1965., kada su Džejms Kuli i Džon Taki objavili matematički algoritam, koji je postao poznat kao FFT.

Od sredine šezdesetih pa na dalje analiza i obrada signala u formi numeričkih podataka se prepoznaje kao digitalna obrada signala, a algoritmi, kompjuterski programi ili sistemi koji se koriste za njihovu obradu kao digitalni filtri. Kako filtriranje predstavlja jedan od fundamentalnih procesa obrade signala uopšte, to mu se posvećuje velika pažnja, pa je razvijen priličan broj pomenutih sistema, među kojima su najznačajniji (FIR) nerekurzivni filtri, (IIR) rekurzivni filtri, dvo- i multidimenzioni filtri, fan filtri, adaptivni filtri, filtri sa više opsega.

Dostignuti stepen razvoja pomenutih tehnologija za analizu signala, analizu i dizajn sistema, digitalnu obradu signala kao i matematički alati potrebni za njihovu realizaciju su opisani u klasičnim radovima Papulisa [12], Jurija [13], Švarca i Fredlanda [14], Golda i Radera [15] i ostalih. Blagovremeno, digitalni računari u formi pristupačnih VLSI čipova su se počeli koristiti kao komponente u sistemima za digitalnu obradu signala. Mogućnost jednostavne i pristupačne realizacije dovode do široke primjene DOS metodologije u velikom broju oblasti:

- prirodne nauke
    - procesiranje seizmičkih i ostalih geofizičkih signala (1920.)

- akvizicija podataka
- spektralna analiza
- simulacija i modeling
- senzori
- astronomska istaživanja i mjerenja

- medicina
  - analiza elektrokardiograma (1924.)
  - dijagnostičke metode (ultrazvuk 1953., skener 1971., magnetna rezonanca 1986.)
  - memorisanje medicinskih slika
  - genetička i proteotomska obrada signala
- telefonija
  - kompresija govora
  - redukcija eha
  - multipleksiranje signala
  - filtriranje signala
- vojska
  - radari (1904.) i sonari (1906.)
  - artiljerijsko navođenje
  - bezbjednost komunikacija
- industrija
  - istraživanje nafte i minerala
  - monitoring i predikcija proizvodnje
  - alati za projektovanje i dizajn
- komercijalna upotreba
  - kompresija multimedijalnih sadržaja
  - specijalni filmski efekti
  - video-konferencijski pozivi (1968.)
  - Internet (1989.)
  - audio sistemi kao što su stereo sistemi, CD plejeri (1982.) i iPod-ovi (2001.)
  - televizija visoke rezolucije (2001.)

LITERATURA

[1] D. Swade, *Charles Babbage and his Calculating Engines*, Science Museum, London, 1991.

[2] C. L. Bower and U.C. Merzbach, *A History of Mathematics*. Second Edition, New York: Wiley 1991.

[3] A. Antoniou, *Digital Signal Processing: Signals, Systems, and Filters*. New York: McGraw-Hill 80, 2005.

[4] C. E. Shannon, “Communication in presence of noise”, *Processing IRE*, vol. 37, no. 1, pp. 10-21, Jan. 1949.

[5] M. H. Weik, “The ENIAC story”, *Journal of the American Ordnance Association*, Jan-Feb 1961.

[6] K. Steiglitz, *The General Theory of Digital Filters with Application to Spectral Analysis*, New York University, New York, AFOSR Report no.64-1664, May 1963.

[7] J. F. Kaiser, “Some practical consideration in the realization of digital filters”, *Proc. Third Allerton Conf. on Circuits and Systems*, pp. 621-633, Oct. 1965.

[8] K. Steiglitz, “The equivalence of digital and analog signal processing”, *Information and Control*, vol. 8, pp. 455-467, Oct 1965.

[9] R. B. Blackman, *Data Smoothing and Prediction*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.

[10] F. F. Kuo and J. F. Kaiser, *System Analysis by Digital Computer*, Wiley, New York, 1966.

[11] J. W. Cooley and J. W. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”, *Math Comp*., vol. 19, pp. 297-301, Apr. 1965.

[12] J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, and P. D. Welch, “Historical notes on the Fast Fourier Transform”, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. 15, pp. 76-79, June 1967.

[13] A. Papoulis, *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

[14] E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method*, Wiley, New York, 1964.

[15] R. J. Schwarz and B. Friedland, *Linear Systems*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[16] B. Gold and C. M. Rader, *Digital Signal Processing*, McGraw-Hill, New York, 1969.